Programme de colle n°16

semaine du 3 au 7 Mars 2025

Chapitre 13 « Intégrales impropres »

On se limite au cas des fonctions continues et positives.

I. Définitions

- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie.
  Dans ce cas, on définit $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie.
  Dans ce cas, on définit $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$.
- On dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsqu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans ce cas, on définit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

II. Propriétés

- Linéarité et relation de Chasles
- Théorèmes de comparaison :
  - Si $f \le g$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.
  - Si $f \le g$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverge.
  - Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

III. Intégrales de référence

- L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »

I. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

II. Variables aléatoires à densité

- Si X est une variable aléatoire, sa fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \le x)$.
- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité lorsque :
  - f positive sur $\mathbb{R}$
  - f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
  - l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1
- X est une variable aléatoire à densité lorsqu'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Dans la suite :
- f ***est une densité de probabilité***
- X ***est une variable aléatoire de densité*** f
- F ***est la fonction de répartition de*** X

- **Propriétés de la fonction de répartition :**
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$
  - F est croissante sur $\mathbb{R}$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
  - F est continue sur $\mathbb{R}$
  - Sauf éventuellement en un nombre fini de points, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$
- **Calculs de probabilité :**
  - $P(X = a) = 0$ donc $P(X < a) = P(X \leq a)$ et $P(X > a) = P(X \geq a)$
  - $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$
  - $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$
  - $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$

III. Espérance

- Définition : sous réserve de convergence, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t$
- Linéarité de l'espérance
- Théorème de transfert :
  - sous sa forme générale : au programme mais assez rarement utilisé…
  - dans le cas particulier du calcul de $E(X^2)$: incontournable !

IV. Variance

- Formule de König-Huygens
- Variance de aX et de $X + b$
- Définition de l'écart-type

V. Indépendance

- Deux variables aléatoires X et Y à densité sont dites indépendantes lorsque pour tous intervalles I et J, on a : $P\big((X \in I) \cap (Y \in J)\big) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - **Exercice 1** *Variable aléatoire à densité*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f.

(b) Déterminer F, la fonction de répartition de X.

(c) X admet-elle une espérance ?

Exercice 2 *Variable aléatoire à densité*

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.
On note alors T une variable aléatoire de densité f.

(b) Montrer que T admet une espérance et une variance de valeurs respectives $E(T) = \frac{3a}{2}$ et $V(T) = \frac{3a^2}{4}$.

(c) i. Déterminer la fonction de répartition F de T.
ii. Calculer $P(T > 2a)$ et $P_{(T>2a)}(T > 6a)$.

Exercice 3 *Loi de $X - a$*

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{a-t} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire réelle de densité f.

(b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) On considère alors la variable aléatoire :

$$Y = X - a$$

i. Déterminer la fonction de répartition de Y.
ii. En admettant que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité g de Y.
iii. Reconnaître la loi de Y.