Programme de colle n°10

semaine du 2 au 7 décembre 2024

Chapitre 8 : Matrices

- Définitions
  - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Égalité de deux matrices
  - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
  - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
  - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
  - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
  - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
  - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
  - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
  - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
  - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
  - Puissances de la matrice identité
  - Formule du binôme de Newton
  - Puissances d'une matrice diagonale
- Inversibilité d'une matrice carrée
  - Définition
  - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale
  - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
  - Méthode lorsqu'on a une relation entre I, A, A^2 …(vue sur des exemples)
  - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
  - Inverse d'un produit
  - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.
- systèmes linéaires
  - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
    $L_i \leftarrow L_j$
    $L_i \leftarrow \lambda L_j$
    $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Questions de cours sur les lois usuelles !!

En début de colle, chaque élève devra donner avec précision deux lois usuelles choisies par l'interrogateur et les définir complètement ainsi que donner leur espérance et leur variance.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 2 TD8 question 2
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

E2 - Exercice 2 TD8 question 3
On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E3 - Exercice 10 TD 8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2) a) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
b) En déduire la valeur de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n est inversible, d'inverse :

$$\left(D^n\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (-2)^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix}.$$

3) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
4) En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.