

# Programme de colle n°17

semaine du 10 au 14 Mars 2025

Même programme que la semaine précédente.

**Chapitre 13 « Intégrales impropres »**

**Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »**

## Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

### E1 - Exercice 1 Variable aléatoire à densité

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
On note alors  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .
- (b) Déterminer  $F$ , la fonction de répartition de  $X$ .
- (c)  $X$  admet-elle une espérance ?

### Exercice 2 Variable aléatoire à densité

Dans cet exercice,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
On note alors  $T$  une variable aléatoire de densité  $f$ .
- (b) Montrer que  $T$  admet une espérance et une variance de valeurs respectives  $E(T) = \frac{3a}{2}$  et  $V(T) = \frac{3a^2}{4}$ .
- (c)
  - i. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $T$ .
  - ii. Calculer  $P(T > 2a)$  et  $P_{(T > 2a)}(T > 6a)$ .

### Exercice 3 Loi de $X - a$

Soit  $a$  un réel strictement positif.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{a-t} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
*On note  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ .*
- (b) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- (c) On considère alors la variable aléatoire :

$$Y = X - a$$

- i. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .
- ii. En admettant que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .
- iii. Reconnaître la loi de  $Y$ .