

Programme de colle n°11

semaine du 9 au 13 décembre 2024

Chapitre 8 : Matrices

- Définitions
 - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
 - Égalité de deux matrices
 - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
 - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
 - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
 - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
 - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
 - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
 - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
 - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
 - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
 - Puissances de la matrice identité
 - Formule du binôme de Newton
 - Puissances d'une matrice diagonale
- Inversibilité d'une matrice carrée
 - Définition
 - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale
 - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
 - Méthode lorsqu'on a une relation entre $I, A, A^2 \dots$ (vue sur des exemples)
 - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
 - Inverse d'un produit
 - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.
- systèmes linéaires
 - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
 - $L_i \leftarrow L_j$
 - $L_i \leftarrow \lambda L_j$
 - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
 - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

- **Espaces vectoriels**
 - Définition, propriétés
 - Espaces vectoriels de référence \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- **Sous-espaces vectoriels**
 - Définition
 - Intersection de sous-espaces vectoriels
- **Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré, famille génératrice**
 - Vecteurs colinéaires
 - Combinaison linéaire
 - Notation $\text{vect}(x_1, \dots, x_n)$
 - Propriété : $\text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel
 - Famille génératrice d'un espace vectoriel
- **Famille libre, famille liée**
 - Définition : famille libre, famille liée
 - Caractérisations :
 - ▶ une famille d'un seul vecteur est libre, si et seulement si, ce vecteur est non nul ;
 - ▶ une famille de 2 vecteurs est libre, si et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ;
 - ▶ une famille de n vecteurs est liée, si et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- **Bases, dimension**
 - Définition d'une base
 - Définition de la dimension
 - Une famille est une base si et seulement si elle vérifie deux conditions parmi les trois suivantes :
 - * famille libre
 - * famille génératrice
 - * nombre d'éléments est égal à $\dim(E)$
 - Espace vectoriel de dimension 0, 1, 2
 - La dimension d'un sous-espace vectoriel est inférieure ou égale à $\dim(E)$, cas d'égalité
 - Base canonique de \mathbb{R}^n , dimension de \mathbb{R}^n
 - Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
 - Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, dimension de $\mathbb{R}_n[X]$
- **Coordonnées dans une base, matrice représentative dans une base**
 - Coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base, matrice représentative d'un vecteur dans une base

- Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base
- Rang
 - Rang d'une famille de vecteurs : $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\text{vect}(x_1, \dots, x_n))$
 - Rang d'une matrice : rang de la famille de vecteurs représentée par A
 - Rang d'un système : nombre de pivots du système homogène associé
 - Propriété : le rang d'une matrice est égal au rang du système homogène associé

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 2 TD8 question 2

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- (b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

E2 - Exercice 2 TD8 question 3

On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E3 - Ex3 TD 9 : *Espace vectoriel de polynômes*

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on note F l'ensemble des polynômes de la forme :

$$aX^2 + bX + c \quad \text{avec } c = 2b - a$$

- (a) On considère les polynômes $P(X) = X^2 + 2X + 2$
et $Q(X) = X^2 + 2X + 3$.
Les polynômes P et Q appartiennent-ils à F ?
- (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (c) Déterminer la dimension de F .

E4 - Ex4 TD 9 : *Droite vectorielle de \mathbb{R}^3*

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on note F l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant le système :

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- (b) Déterminer la dimension de F .