

# Programme de colle n°18

semaine du 17 au 21 Mars 2025

## Chapitre 16 « Géométrie euclidienne »

### I. Produit scalaire

- Définition du produit scalaire de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et propriétés du produit scalaire
- Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs
- Définition d'une famille orthogonale
- Propriété : une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre
- Plans de  $\mathbb{R}^3$  : équation, vecteur normal

### II. Norme

- Définition de la norme d'un vecteur et propriétés de la norme
- Définition d'un vecteur normé ou unitaire

### III. Bases orthonormales

- Définitions de famille et base orthonormale
- Propriété : une famille orthonormale est libre
- Propriété : la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormale
- Expression du produit scalaire et coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale
- Matrice de passage vers une base orthonormale : matrice telle que  ${}^t P P = I$
- Théorème spectral : une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale. Explicitement : Si  $S$  est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible avec  ${}^t P P = I$  telles que :  $P^{-1} S P = D$ .

### IV. Projections orthogonales

$F$  désigne un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

- Le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est l'unique vecteur  $p(x)$  tel que :
  - ▶  $p(x) \in F$
  - ▶  $x - p(x)$  est orthogonal à tout vecteur de  $F$
- Propriété :  $p$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$
- Expression de  $p(x)$  dans une base orthonormale de  $F$
- La distance du vecteur  $x$  au sous-espace vectoriel  $F$  est :  $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ .

## Chapitre 17 « Compléments d'analyse »

### I. Dérivées successives

- Définitions : dérivées successives, fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$
- Les fonctions de référence du *Chapitre 1* sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition (à l'exception de la racine carrée et de la valeur absolue, non dérivables en 0)
- Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  ou  $\mathcal{C}^\infty$  : somme, produit, inverse, quotient, composition

## II. Suites équivalentes

- Définition : on dit que  $u_n \sim v_n$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$
- Cas d'une limite finie non nulle : pour  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $u_n \sim \ell \iff \lim u_n = \ell$
- Opérations sur les équivalents : produit, quotient, élévation à une même puissance
- Équivalents et limites : si deux suites sont équivalentes, alors elles ont la même limite

## III. Fonctions équivalentes

- Définition : on dit que  $f \underset{a}{\sim} g$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- Cas d'une limite finie non nulle : pour  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- Opérations sur les équivalents : produit, quotient, élévation à une même puissance
- Équivalents et limites : si deux fonctions sont équivalentes en  $a$ , alors elles ont la même limite en  $a$
- Équivalents de référence : fonction polynôme (en l'infini et en 0), fonction rationnelle (en l'infini et en 0),  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ ,  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ),  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

## IV. Fonctions négligeables devant $x^n$

- Définition : on dit que  $f = o_{x \rightarrow a}(x^n)$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x^n} = 0$
- Propriété :  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} x^n \iff f(x) = x^n + o_{x \rightarrow a}(x^n)$
- Comparaison de  $x^n$  et  $x^m$  au voisinage de 0 et de l'infini
- Opérations sur les  $o$  : multiplication et division

## V. Développements limités

- Définitions : développement limité à l'ordre  $n$  en 0, partie régulière
- Formule de Taylor-Young
- Développements limités à connaître :  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $e^x$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $(1+x)^\alpha$
- Opérations sur les développements limités : somme, produit, composition, primitivation
- Interprétation géométrique : tangente, position relative entre une courbe et sa tangente