Programme de colle n°1

semaine 4 du 20 septembre au 24 septembre 2021

Chapitre 1 : Logique et raisonnements

- Rudiments de logique
  - Quantificateurs
  - Implication, contraposition, équivalence.
  - Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.
  - Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).

Chapitre 2 : Fonctions d'une variable réelle

- Inégalités
  - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.
  - Valeur absolue. Inégalité triangulaire.
  - Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, Minorant ; maximum, minimum.
- Généralités sur les fonctions
  - Ensemble de définition
  - Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.
  - Parité, imparité, périodicité.
  - Somme, produit, composée.
  - Monotonie (large et stricte).
  - Fonctions majorées, minorées, bornées.
  - Limites : (Ici on rappelle les résultats du lycée, les résultats seront démontrés dans des chapitres ultérieurs) Opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition) ; théorèmes d'encadrement, de minoration de majoration, de la limite monotone.

Chapitre 3 : Fonctions usuelles

- Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances (définition,propriétés algébriques, variations, limites)
- Fonctions sh et ch (définition,propriétés algébriques, variations, limites)

Questions de cours

Q1 - Démontrer les deux inégalités triangulaires.

Q2 - Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$. Montrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Q3 - Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Q4 - Montrer que $\forall (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$.

Exercices à savoir refaire :

E1 - (Ex 13 TD1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x \neq y) \text{ et } x \neq z \Rightarrow \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right).$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax+b$.

E2 - (Ex 18 TD 1) On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

E3 - (Ex 3 TD2) Montrer que l'ensemble $E = \left\{\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est borné.

E4 - (Ex 8 TD2) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

E5 - (Ex 11 TD2) Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à la fois monotones et périodiques.