Programme de colle n°8

semaine du 18 au 23 novembre 2024

Etude globale de fonctions

- Généralités sur les fonctions : Image d'un ensemble, antécédent, composition,parité,monotonie, monotonie des fonctions dérivables, majorant, minorant,extremums
- Fonctions injectives,surjectives,bijectives (Note pour les colleurs :pas trop d'exercices théoriques sur injection et surjection, plutôt se placer dans le cadre de bijections de fonctions réelles)
  Caractérisation des bijections et fonction réciproque;
  Théorème de la bijection continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.

Lois usuelles discrètes

- Loi certaine, espérance et variance.
- Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, espérance et variance.
- Loi de Bernoulli, espérance et variance.
- Loi binomiale, espérance et variance.
- Loi géométrique, espérance et variance.
- Loi de Poisson, espérance et variance.

Questions de cours

En début de colle, chaque élève devra donner avec précision deux lois usuelles choisies par l'interrogateur et les définir complètement ainsi que donner l'espérance et la variance.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 4 TD6
Déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $8x^3 - 4x + 1 = 0$ et encadrer chacune des solutions entre deux entiers consécutifs.

E2 - Exercice 5 TD6
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x\ln(x) - 1$.
1. Donner le domaine de définition et celui de continuité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans un ensemble que l'on précisera.

E3 - Exercice 2 TD7
Soit $p \in]0,1[$.
On considère X une variable aléatoire discrète de loi géométrique de paramètre p.

(a) Calculer la probabilité que X prenne une valeur impaire, en déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

(b) On note F la fonction de répartition de X.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $F(n)$.
En déduire la probabilité $P(X > n)$.

E4 - Exercice 3 TD7
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et Y suit la loi de Poisson de paramètre μ, avec λ et μ deux réels strictement positifs. On note $Z = X + Y$.

(a) Donner $E(Z)$ et $Z(\Omega)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(Z = n)$ en fonction d'événements faisant intervenir les variables aléatoires X et Y.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, développer $\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$.

(d) En déduire la loi de Z.