Programme de colle n°3

semaine du 30 septembre au 5 octobre 2024

Chapitre 2 : suites de nombres réels

- **Généralités sur les suites**
  Définition d'une suite (explicitement/par une relation de récurrence)
  - Suite croissante/décroissante/monotone
  - Suite majorée/minorée/bornée
- **Suites arithmétiques**
  - Définition
  - Expression du terme général
  - Somme de termes consécutifs
- **Suites géométriques**
  - Définition
  - Expression du terme général
  - Somme de termes consécutifs
- **Autres sommes à connaître**
  - Somme des k
  - Somme des k^2
- **Limites**
  - Suite convergente/divergente
  - Limite de q^n
  - Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient
  - Théorèmes de comparaison
  - Théorèmes de conservation de l'ordre par passage à la limite
  - Théorème de la limite monotone
- **Suites adjacentes**
  - Définition
  - Théorème
- **Suites équivalentes**
  - Définition

Chapitre 3 : séries numériques à termes positifs

- **Définition et propriétés**
  - Définition : série, somme partielle
  - Propriété : croissance de la suite des sommes partielles
  - Définition : série convergente, série divergente, somme d'une série
  - Condition nécessaire de convergence d'une série
  - Linéarité de la somme
  - Théorèmes de comparaison
- **Séries de référence**
  - Séries de Riemann : divergence de $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique), convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$
  - CNS de convergence et somme des séries suivantes :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k\geq 0} q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k\,q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k^2\,q^k \quad .$$

Questions de cours

Q1 - Enoncer le théorème de gendarme pour les suites.

Q2 - Donner la définition de suites adjacentes et énoncer le théorème des suites adjacentes.

Q3 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs ?

Q4 - Donner les séries de référence (au choix pour le colleur).

Exercices à savoir refaire :

E1 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et est supérieur ou égal à 0 .
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

E2 - Exercice 6 TD2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
La suite (u_n) est-elle monotone ?
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit :

$$v_n=u_{2n} \text{ et } w_n=u_{2n-1}$$

Démontrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

E3 - Exercice 6 TD 3
1. Montrer que pour tout $k\geq 2$: $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n\geq 2$: $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1$.
3. Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.
4. En déduire la nature de la série $\sum\frac{n^3-5n+6}{\left(n^2-6\right)^2(n+1)}$.

E4 - Exercice 8 TD 3
1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\ln(n+1)$.
3. Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.