Programme de colle n°15

semaine du 27 au 31 janvier 2025

Chapitre 12 « Diagonalisation »

I Formule de changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Une matrice de passage est inversible.
- Formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$

II Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

- Définition : valeur propre
- Caractérisation : λ est valeur propre de f, si et seulement si, $\text{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$
- Définition : vecteur propre
- Définition : sous-espace propre
- Propriété : les sous-espaces propres sont des sous-espaces vectoriels
- Propriété : la concaténation de bases de sous-espaces propres distincts forme une famille libre

III Diagonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

- Définitions :
  - f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale
  - A est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
- Caractérisation : f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f
- Propriété : la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
- Théorème : f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

IV Cas des matrices symétriques réelles

- Définition
- Théorème : une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Ex2 TD12 :*En dimension 2*
On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

(b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de M.

(c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}MP$.

E2 - Ex4 TD 12 :*En dimension 3, valeurs propres données*
On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que 2 et 3 sont des valeurs propres de M.
On note E_2 et E_3 les sous-espaces propres associés.

(b) Déterminer une base de E_2 et une base de E_3.

(c) Justifier que M est diagonalisable.

(d) On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs des bases obtenues à la question 2.
Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}MP$.

E3 - EX5 TD12 *En dimension 3, vecteurs propres donnés*
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit $u = (1;1;-2)$, $v = (0;1;-1)$ et $w = (1;1;1)$.

(a) Justifier sans calculs que A est diagonalisable.

(b) Justifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On note alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(c) Justifier que u, v, w sont des vecteurs propres de f.

(d) Justifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.