Programme de colle n°7

semaine du 12 au 16 novembre 2024

Variables aléatoires discrètes

- **Variable aléatoire discrète**
  - Définition de variable aléatoire discrète finie ou infinie (le programme de TB se restreint au cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$)
  - Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète
  - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète
- **Espérance**
  - Définition de l'espérance
  - Interprétation fréquentiste de l'espérance
  - Propriétés :
    - Espérance d'une variable aléatoire constante
    - Positivité de l'espérance
    - Linéarité de l'espérance
  - Théorème de transfert :
    - sous sa forme générale : au programme désormais !!!
    - dans le cas particulier du calcul de $E[X^2]$: incontournable !
  - **Variance et écart-type**
    - Définition de la variance
    - Définition de l'écart-type
    - Interprétation de la variance.
    - Variance de aX et de $X+b$
    - Formule de Kônig-Huygens
  - **Fonction de répartition**
    - Définition de la fonction de répartition
    - Propriétés de la fonction de répartition (variations, limites, continuité par morceaux)
    - Lien entre loi et fonction de répartition.

Etude globale de fonctions

- Généralités sur les fonctions : Image d'un ensemble, antécédent, composition,parité,monotonie, monotonie des fonctions dérivables, majorant, minorant,extremums
- Fonctions injectives,surjectives,bijectives (Note pour les colleurs :pas trop d'exercices théoriques sur injection et surjection, plutôt se placer dans le cadre de bijections de fonctions réelles)
  Caractérisation des bijections et fonction réciproque;
  Théorème de la bijection continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 2 TD 5
Soit a un nombre réel.
On considère une variable aléatoire X prenant toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$P(X=n) = a\frac{4^n}{n!}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que t^X admet une espérance et la calculer.

E2 - Exercice 3 TD 5
Une urne contient des boules blanches et des boules noires.
On note p la probabilité de tirer une boule noire et q la probabilité de tirer une boule blanche. On tire au hasard des boules une par une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule noire.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :
- N_k : "on obtient une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage"
- B_k : "on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage"

On note X la variable aléatoire discrète égale nombre de boules blanches obtenues.
1. Déterminer la loi de X.
2. Vérifier que la somme des $P(X=n)$ est égale à 1 .
3. Calculer $E(X)$ si elle existe. 4. Calculer V(X) si elle existe.

E3 - Exercice 5 TD5
Soit n un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $k \in \{1,2,\dots,n\}$.
On note F sa fonction de répartition, on donne $F(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$.

1. Dans cette question, on suppose que $n=3$.

Représenter graphiquement F, donner la loi de X, vérifier que $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$, puis calculer l'espérance de X.

2. Dans le cas général : déterminer la loi de X, vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(X=k)=1$, calculer l'espérance de X et vérifier la validité de ce résultat pour $n=3$.

E4 - Exercice 4 TD6
Déterminer le nombre exact de solutions de l'équation $8x^3-4x+1=0$ et encadrer chacune des solutions entre deux entiers consécutifs.

E5 - Exercice 5 TD6
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x\ln(x) - 1$.
1. Donner le domaine de définition et celui de continuité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans un ensemble que l'on précisera.