Programme de colle n°3

semaine 6 du 4 octobre au 8 octobre 2021

Chapitre 5 : Nombres complexes

1. Nombres complexes :
   - Partie réelle et imaginaire.
   - Opération sur les nombres complexes
   - Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur (*On identifie* $\mathbb{C}$ *au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »)*)
2. Conjugaison et module :
   - Conjugaison, compatibilité avec les opérations.
   - Module.
   - Relation $|z|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
3. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie.
   - Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1 (notation $\mathbb{U}$). Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.
   - Exponentielle d'une somme.
     Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{it}$, de $\mathrm{e}^{ia} \pm \mathrm{e}^{ib}$.
   - Formule de Moivre
   - Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(a) \pm \cos(b), \sin(a) \pm \sin(b)$.)
   - Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$. (Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$).
4. Forme trigonométrique :
   - Forme trigonométrique $re^{i\theta}$, (r>0) d'un nombre complexe non nul. Arguments d'un produit, d'un quotient.
   - Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\omega)$.
   - Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
   - Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.

Questions de cours

Q1 - Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ avec cas d'égalité.

Q2 - Pour t dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$

Q3 - proposition : Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $Z = \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.

E2 - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}.$$

E3 - Montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres complexes tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$, on a :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

E4 - Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Remarques pour les interrogateurs

L'étude de résolution algébrique d'équations dans $\mathbb{C}$ a été abordée vendredi dernier, en conséquent peu d'exercices ont été faits en classe. Les racines $n-$ièmes de l'unité et l'interprétation géométrique des nombres complexes seront au programme de colle de la semaine prochaine.