Programme de colle n°5

semaine 8 du 17 octobre au 22 octobre 2021

CHAPITRE 6 : Ensembles, applications, relations

- Ensembles
  - Ensemble, appartenance. Ensemble vide. Inclusion. Partie (ou Sous ensemble).
  - Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire. (Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A, \overline{A}, A^c$ pour le complémentaire.
  - Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
  - Ensemble des parties d'un ensemble. (Notation $\mathcal{P}(E)$.
  - Partition d'un ensemble
- Applications et relations
  - Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application. (Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.) Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
  - Famille d'éléments d'un ensemble.
  - Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble (notation $\mathbb{1}_A$.
  - Restriction et prolongement (notation $f_{|A}$).
  - Image directe et image réciproque (notations $f(A)$ et $f^{-1}(A)$, cette dernière pouvant prêter à confusion).
  - Composition
  - Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
  - Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. (notation f^{-1})
  - Relation binaire sur un ensemble.
  - Relation d'équivalence, classes d'équivalence. (Notion d'ensemble quotient hors programme). Les classe d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent.
  - Relation d'ordre, Ensemble ordonné, ordre partiel, ordre total.

Exercices à savoir refaire :

E1 - **Ex 3 et 8 TD6** Soit E un ensemble et soient A et B des sous-ensembles de E. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

par deux méthodes différentes.

E2 - **Ex 5 TD6** Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(a) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(b) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.

(c) Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ \Big(A\Delta B = A\Delta C \quad \Longleftrightarrow \quad B = C\Big)$.

E3 - **Ex 14 TD6**

(a) On pose $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(b) On pose $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & [-1, 1[\\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
Montrer que g est bijective et calculer g^{-1}.

E4 - **Ex 16 TD6** Soient E, F, G et H des ensembles.

(a) Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ surjective},$$

(b) Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$.
Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

E5 - **ex 19 TD6** Soit E un ensemble et soient A et B des parties non vides de E. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f: \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

(a) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

(b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

(c) Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1}.